# 关于 Smarandache 幂函数的注记

任 鹏[1],王 阳[2],邓书显[1]

1. 河南工程学院数理系,郑州 450007
2. 南阳师范学院数学与统计学院,河南南阳 473061

**摘要** 对于正整数 $n$,Smarandache 幂函数 $SP(n)$定义为最小的正整数 $m$ 使得 $n$ 整除 $m^m$。本文在研究数列$\{SP(n)\}$性质的基础上,通过对 $SP(n)$的一次均值及其渐近公式、无穷数列 $SP(n)$的收敛性及其相关的恒等式、方程 $SP(n^k)=\varphi(n)(k=1, 2, 3)$的可解性($\varphi(n)$为 Euler 函数)及其所有的正整数解等相关问题的讨论,应用解析方法研究了 $SP(n)$的 $k$ 次方幂的分布性质。针对任意的实数 $x\geqslant 3$、给定的实数 $k,l(k>0,l\geqslant 0)$,及对所有的素数 $p$、任意的正数 $\varepsilon$ 和 Riemann Zeta-函数,给出并证明了其相应的渐近公式;对于任意的实数 $x\geqslant 3$及给定的实数 $k'>0$ 的情况,也给出并证明了其相应的渐近公式;对于任意的实数 $x\geqslant 3$ 及给定的实数 $l\geqslant 0$,其相应的渐近公式也一并给出并加以证明。由此,给出 $\sum\limits_{n\leqslant x} n^l(SP(n))^k$ 及 $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}$ $(k>0,l\geqslant 0)$的渐近公式。在 $l=0,k=1/k'$情况下,以及 $k=1, 2, 3$ 且 $\zeta(2)=\pi^2/6$,$\zeta(4)=\pi^4/90$ 情况下,可以看出该定理是对相关结论的进一步推广。

**关键词** 幂函数;$k$ 次方幂;渐近公式

**中图分类号** O156.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)17-0050-04

## Some Notes on the Smarandache Power Function

REN Peng[1], WANG Yang[2], DENG Shuxian[1]

1. *Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 45000, China*
2. *College of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang, 473061, Henan Province, China*

**Abstract** For any positive integern, the Smarandache power function $SP(n)$ is defined as the smallest positive integermsuch that $m^m$ is divisible by $n$. The main purpose of this paper is to study the solvability of equations $SP(n)=\phi(n)$, $k$=1, 2, 3 (for the Euler function) and all the positive integer solutions and other related issues, based on the nature of the series $\{SP(n)\}$, 1st mean, asymptotic formula, the convergence of infinite series $SP(n)$ and its related identity. The analytic methods are used to get the distribution properties of the k-th Powers of $SP(n)$. For any real number $x\geqslant 3$, given the real numbers $k$, $l$ $(k>0, l\geqslant 0)$, and all the prime numbers $p$, any positive number $\varepsilon$ and the Riemann Zeta-function, we give and prove the corresponding asymptotic formula. For any real number $x\geqslant 3$ and a given real number $k'>0$, we also give and prove the corresponding asymptotic formula. For any given real numbers $x\geqslant 3$ and real numbers $l\geqslant 0$, the corresponding asymptotic formula is also given and proven together. Thus, the asymptotic formula of $\sum\limits_{n\leqslant x} n^l(SP(n))^k$ and $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}$ $(k>0, l\geqslant 0)$ is given, when $l=0$, $k=1/k'$, $k$=1,2,3 and $\zeta(2)=\pi^2/6$, $\zeta(4)=\pi^4/90$, and it could be found that the theorem is a further extension of the related results.

**Keywords** power function; the $k$-th power; asymptotic formula

## 0 引言

对于正整数 $n$,Smarandache 幂函数 $SP(n)$定义为最小的正整数 $m$ 使得 $n$ 整除 $m^m$,即

$$SP(n)=\min\left\{m:n\,\middle|\,m^m,\ m\in N^+,\ \prod_{p|m}p=\prod_{p|n}p\right\}$$

由定义知,$SP(1)=1$,$SP(2)=2$,$SP(3)=3$,$SP(4)=2$,$SP(5)=5$,

**收稿日期**:2010-01-17;**修回日期**:2010-07-09
**基金项目**:山西省教育厅科研专项基金项目(08JK433)
**作者简介**:任鹏,讲师,研究方向为数论,电子信箱:dshuxian@163.com




$SP(6)=6, SP(7)=7, SP(8)=4, \cdots$。在文献[1]中,F. Smarandache 提出研究数列$\{SP(n)\}$的性质。关于这个问题文献[2]~[4]已做了初步的研究,获得一些重要结论。其中文献[2]研究了 $SP(n)$ 的一次均值,得到了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} SP(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(1+p)}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$$

文献[3]研究了无穷数列 $SP(n)$ 的收敛性,给出了恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu(n)}}{(SP(n^k))^s}=\begin{cases}\dfrac{2^s+1}{(2^s-1)\zeta(s)} & k=1,2\\ \dfrac{2^s+1}{(2^s-1)\zeta(s)}-\dfrac{2^s-1}{4^s} & k=3\\ \dfrac{2^s+1}{(2^s-1)\zeta(s)}-\dfrac{2^s-1}{4^s}+\dfrac{3^s-1}{9^s} & k=4,5\end{cases}$$

其中,$\mathrm{Re}(s)>1$。文献[4]研究了方程 $SP(n^k)=\phi(n)$, $k=1,2,3$ 的可解性,($\phi(n)$为 Euler 函数),并给出了所有的正整数解,即方程 $SP(n)=\phi(n)$有且仅有 4 个正整数解,即 $n=1,4,8,18$;方程 $SP(n^2)=\phi(n)$有且仅有 3 个正整数解 $n=1,8,18$;方程 $SP(n^3)=\phi(n)$有且仅有 3 个正整数解。

本文主要目的是利用解析方法研究 $SP(n)$的 $k$ 次方幂的分布性质,给出了 $\sum_{n\leqslant x} n^l(SP(n))^k$ 及 $\sum_{n\leqslant x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}$ $(k>0,\ l\geqslant 0)$ 的渐近公式,推广了文献[2]的结论。具体过程如下。

**定理** 对任意的实数 $x\geqslant 3$ 及给定的实数 $k,l$ $(k>0, l\geqslant 0)$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} n^l(SP(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{(k+l+1)\zeta(2)}x^{k+l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}=\frac{\zeta(k+1)}{(k-l+1)\zeta(2)}x^{k-l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

其中,$\prod_p$ 表示对所有素数 $p$ 求积,$\varepsilon$ 表示任意的正数,$\zeta(s)$表示 Riemann Zeta-函数。

**推理 1** 对任意的实数 $x\geqslant 3$ 及给定的实数 $k'>0$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SP(n))^{\frac{1}{k'}}=\frac{6k'\zeta\left(\frac{1+k'}{k'}\right)}{(k'+1)\pi^2}x^{\frac{k'+1}{k'}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{k'}}(1+p)}\right)+O\left(x^{\frac{k'+2}{2k'}+\varepsilon}\right)$$

特别地,

$$\sum_{n\leqslant x}(SP(n))^{\frac{1}{3}}=\frac{9\zeta\left(\frac{4}{3}\right)}{2\pi^2}x^{\frac{4}{3}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}(1+p)}\right)+O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x}(SP(n))^{\frac{1}{2}}=\frac{4\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}(1+p)}\right)+O(x^{1+\varepsilon})$$

**推理 2** 对任意的实数 $x\geqslant 3$ 及给定的实数,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}n^l(SP(n))=\frac{1}{(l+2)}x^{l+2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p(1+p)}\right)+O\left(x^{l+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x}n^l(SP(n))^2=\frac{6\zeta(3)}{(l+3)\pi^2}x^{l+3}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2(1+p)}\right)+O\left(x^{l+\frac{5}{2}+\varepsilon}\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x}n^l(SP(n))^3=\frac{\pi^2}{15(l+4)}x^{l+4}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3(1+p)}\right)+O\left(x^{l+\frac{7}{2}+\varepsilon}\right)$$

## 1 引理和证明

设 $s=\sigma+it$,$\zeta(s)$为 Riemann Zeta-函数,$k>0, l\geqslant 0$ 为给定的两个实数,$p$ 为素数。

令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $U(n)=\prod_{p|n}p$。为了完成定理的证明,需要下列引理。

**引理 1** 对任意的实数 $x\geqslant 1$ 及给定的实数 $k\geqslant 1$,有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(U(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

**证明** 令 $A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(U(n))^k}{n^s}$,由于 $U(n)$是积性函数,根据文献[5]中的 Euler 积分式,当 $\sigma>k+1$ 时,可得

$$A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(U(n))^k}{n^s}=\prod_p\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(U(p^m))^k}{p^{ms}}\right]$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{p^k}{p^s}+\frac{p^k}{p^{2s}}+\cdots\right)=\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p^{s-k})}\right)$$

令 $h(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p^{s-k})}\right)$,当 $\sigma>k+1$ 时,$|U(n)|\leqslant n$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(U(n))^k}{n^\sigma}<\zeta(\sigma-k)$,由文献[5]中的 Perron 公式知,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n^{s_0}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left[x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\lg x}{T}\right)\right]+O\left[x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right]$$

其中,$N$ 为离 $x$ 最近的整数,当 $x$ 为半奇数时,取 $N=x-\frac{1}{2}$, $\|x\|=|x-N|$。取 $a(n)=(U(n))^k, s_0=0, b=k+\frac{3}{2}, T=x^{k+\frac{1}{2}}, H(x)=x$, $B(\sigma)=\zeta(\sigma-k)$,则

$$\sum_{n\leqslant x}(U(n))^k=\frac{1}{2\pi i}\int_{k+\frac{3}{2}-iT}^{k+\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

将积分线从 $s=k+\frac{3}{2}\pm iT$ 移到 $k+\frac{1}{2}\pm iT$,此时函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=k+1$ 处有一个一阶极点,其留数为

$$L(x)=\operatorname*{Re}_{s=k+1} s\left(\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}\right)$$

$$=\lim_{s\to k+1}\left((s-k-1)\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}\right)$$

$$=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}h(k)$$

其中，$h(k)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)$。容易估计，

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{k+\frac{3}{2}+iT}^{k+\frac{1}{2}+iT}+\int_{k+\frac{1}{2}+iT}^{k+\frac{1}{2}-iT}+\int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+\frac{3}{2}+iT}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)}h(s)\frac{x^s}{s}<<x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

所以，

$$\sum_{n\le x}(U(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

引理 1 得证。

**引理 2** 对任意的实数 $x\geqslant3$、给定的实数 $k>0$ 及正整数 $\alpha$，有

$$\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha>p}}(\alpha p)^k\ll\ln^{2k+1}x$$

**证明** 设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$，由文献[5]~[8]知，

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

由 Able 等式，可得

$$\sum_{p\le x}p^k=\pi(x)x^k-k\int_2^x\pi(t)t^{k-1}\mathrm{d}t$$

故

$$\sum_{p\le\ln x}p^k=\frac{\ln^k x}{(k+1)}+O(\ln^{k-1}x)-k\int_2^{\ln x}\frac{t^k}{\ln t}\mathrm{d}t+O\left(\int_2^{\ln x}\frac{t^k}{\ln^2 x}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\ln^k x}{k+1}+O(\ln^{k-1}x)$$

因为 $\alpha>p$，所以 $p^p<p^\alpha\leqslant x$。那么

$$p<\frac{\ln x}{\ln p}<\ln x \qquad \alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln p}$$

又

$$\sum_{n\le x}n^k=\frac{x^{k+1}}{k+1}+O(x^k)$$

从而

$$\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha>p}}(\alpha p)^k=\sum_{p\le\ln x}p^k\sum_{\alpha\le\frac{\ln x}{\ln p}}\alpha^k<<\ln^{k+1}x\sum_{p\le\ln x}\frac{p^k}{\ln^{k+1}p}<<$$

$$\ln^{k+1}x\sum_{p\le\ln x}p^k<<\ln^{2k+1}x$$

引理 2 得证。

## 2 定理的证明

令 $\mathscr{A}=\{n|n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},\ \alpha_i\leqslant p_i,\ i=1,2,\cdots,r\}$，当 $n\in\mathscr{A}$ 时，有 $SP(n)=U(n)$，当 $n\in N^*$ 时，有 $SP(n)\geqslant U(n)$，从而

$$\sum_{n\le x}(SP(n))^k-\sum_{n\le x}(U(n))^k=\sum_{n\le x}[(SP(n))^k-(U(n))^k]<<$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ SP(n)>U(n)}}(SP(n))^k$$

由文献[2]知，存在正整数 $\alpha$ 及素数 $p$，使得 $SP(n)<\alpha p$，根据引理 2 可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ SP(n)>U(n)}}(SP(n))^k<\sum_{\substack{n\le x\\ SP(n)>U(n)}}(\alpha p)^k<<\sum_{n\le x}\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha>p}}(\alpha p)^k<<x\ln^{2k+1}x$$

故

$$\sum_{n\le x}(SP(n))^k-\sum_{n\le x}(U(n))^k<<x\ln^{2k+1}x$$

由引理 1 知，

$$\sum_{n\le x}(SP(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+$$

$$O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon})+O(x\ln^{2k+1}x)=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

设 $B(x)=\sum_{n\le x}(SP(n))^k$，利用 Able 求和公式[5-8]，可得

$$\sum_{n\le x}n^l(SP(n))^k=x^lB(x)-1-l\int_1^xB(t)t^{l-1}\mathrm{d}t=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k+l+1}\cdot$$

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon})-\frac{l\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}\cdot$$

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)\int_1^xt^{k+l}\mathrm{d}t+O\left(\int_1^xt^{k+l-\frac{1}{2}+\varepsilon}\mathrm{d}t\right)\cdot$$

$$=\frac{\zeta(k+1)}{(k+l+1)\zeta(2)}x^{k+l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

$$\sum_{n\le x}\frac{(SP(n))^k}{n^l}=x^{-l}B(x)-1+l\int_1^xB(t)t^{-l-1}\mathrm{d}t=\frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}x^{k-l+1}\cdot$$

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)+\frac{l\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}\cdot$$

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)\int_1^xt^{k-l}\mathrm{d}t+O\left(\int_1^xt^{k-l-\frac{1}{2}+\varepsilon}\mathrm{d}t\right)\cdot$$

$$=\frac{\zeta(k+1)}{(k-l+1)\zeta(2)}x^{k-l+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(1+p)}\right)+O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

定理得证。

## 3 推理的证明

根据定理，取 $l=0$, $k=\frac{1}{k'}$，即可得到推理 1；取 $k=1,2,3$，考虑到 $\zeta(2)=\pi^2/6$，$\zeta(4)=\pi^4/90$，即可证得推理 2。可以看出，该定理是对文献[2]的推广。

## 4 结论

本文利用解析方法研究了 $SP(n)$ 的 $k$ 次方幂的分布性质，根据引理 1 和引理 2 证明了文中的定理，又根据该定理




证明了相关两个推论,给出了 $\sum_{n\leqslant x} n^l (SP(n))^k$ 及 $\sum_{n\leqslant x} \frac{(SP(n))^k}{n^l}$ $(k>0, l\geqslant 0)$ 的渐近公式,在 $l=0, k=1/k'$,以及 $k=1,2,3$ 且 $\zeta(2)=\pi^2/6, \zeta(4)=\pi^4/90$ 的情况下,可以看出该定理推广了文献[2]的结论。

## 参考文献(References)

[1] Smarandache F. Only problems not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 徐哲峰. Smarandache 幂函数的均值[J]. 数学学报, 2006, 49(1): 77–80.
Xu Zhefeng. Smarandache power function of the mean [J]. *Journal of Mathematic*, 2006, 49(1): 77–80.

[3] Zhou Huanqin. An infinite series involving the Smarandache power function *SP*(*n*)[J]. *Scientia Magna*, 2006, 3(2): 109–112.

[4] Tian C, Li X. On the Smarandache power function and Euler totient function[J]. *Scientia Magna*, 2008, 4(1): 35–38.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
Pan Chengdong, Pan Chengbiao. Analytic number theory [M]. Beijing: Science Press, 1999.

[6] Qin Y, Rivera J M. Universal attractors for a nonlinear one–dimensional heat–conductive viscous real gas [J]. *Pro Roy Society Edinburgh: Section A Mathematics*, 2002, 132: 685–709.

[7] Qin Y, Rivera J M. Exponential stability and universal attractors for the Navier–Stokes equations of compressible fluids between two horizontal parallel plates in $R^3$[J]. *Appl Numer Math*, 2003, 47(2): 209–235.

[8] Qin Y, Wang X, Cui G. Remarks on maximal attractors for the compressible Navier–Stokes equations of viscous and heat–conductive fluid[J]. *Chin Quart J Math*, 2004, 19(4): 338–345.

(责任编辑　杨书卷)